TakiAcademy
www.takiacademy.com

Raisonnement par récurrence.

Exemple 1 =

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1+U_n} \end{cases}$$

Montrer que $1 \leqslant U_n \leqslant 2$

Rep :

étape ① : pour $n = 0$; $1 \leqslant U_0 = 1 \leqslant 2$

Vraie à l'ordre 0

étape ② : Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose que $1 \leqslant U_n \leqslant 2$ et montrons que $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 2$.

$$U_{n+1} - 1 = \sqrt{1+U_n} - 1$$

$$= \frac{1+U_n-1}{\sqrt{1+U_n}+1}$$

$$= \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n}+1} \geqslant 0$$

Donc $U_{n+1} \geqslant 1$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

$$U_{n+1} - 2 = \sqrt{1+U_n} - 2$$

$$= \frac{1+U_n-4}{\sqrt{1+U_n}+2}$$

$$= \frac{U_n-3}{\sqrt{1+U_n}+2} \leqslant 0$$

(Car $U_n \leqslant 2$)

Donc $\boxed{U_{n+1} \leqslant 2}$.

Ainsi : $\boxed{1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 2}$.

Etape ③ : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\boxed{1 \leqslant U_n \leqslant 2}$

Commentaire :

Etape ① : Initialisation

il faut montrer que la propriété est vraie pour le 1er rang ($n \in \mathbb{N}$; le 1er rang est 0 ; $n \in \mathbb{N}^*$ dans Cas le 1er rang est 1 ...)

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Etape ② = **Hérédité** : on fixe n -
on suppose que la propriété est
vraie à l'ordre n (hypothèse de recurrence)
et on montre que ça reste héréditaire
(vraie) à l'ordre suivant.

Etape ③ = **Conclusion**.
on peut conclure que ce qu'on a
supposé est vraie.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815